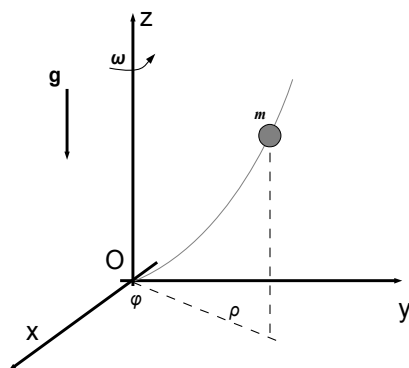


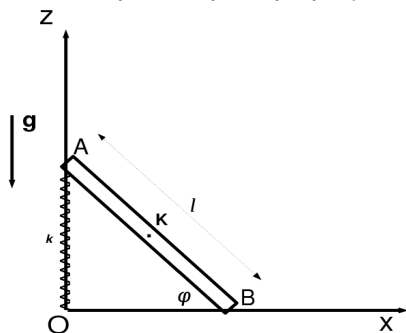
- α) Όταν η συνάρτηση Lagrange ενός συστήματος δεν εξαρτάται άμεσα από το χρόνο, υπάρχει ένα ολοκλήρωμα της κίνησης. Δώστε τη μορφή του και αποδείξτε ότι είναι ολοκλήρωμα της κίνησης.
β) Αν η συνάρτηση $\Phi(q_1, q_2, p_1, p_2)$ είναι ολοκλήρωμα της κίνησης των εξισώσεων Hamilton, με συνάρτηση Hamilton την $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$, αποδείξτε ότι η αγκύλη Poisson $[\Phi, H]$ είναι ίση με μηδέν.
- Ο πίνακας του τανυστή αδράνειας ως προς το κέντρο μάζας O στερεού σώματος, μάζας $m=1$, εκπεφρασμένος στο καρτεσιανό σύστημα $Oxyz$ που είναι σταθερά συνδεδεμένο με το στερεό σώμα, έχει στοιχεία $J_{11}=1$, $J_{12}=0$, $J_{13}=0$, $J_{22}=2$, $J_{23}=0$, $J_{33}=3$. Να βρεθεί η ροπή αδράνειας ως προς άξονα που περνά από το σημείο $A(2, -1, 4)$ και είναι παράλληλος προς το διάνυσμα $(2, -1, 4)$.



Η παραβολή περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, ω , γύρω από τον κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από την αρχή των αξόνων O . Να υπολογίσετε:

- τη συνάρτηση Lagrange του συστήματος,
- τις διαφορικές εξισώσεις και τα ολοκληρώματα της κίνησης
- τη συνάρτηση Hamilton του συστήματος.

- Η ομογενής στερεά ράβδος, μήκους l και μάζας m , κινείται στο κατακόρυφο επίπεδο Oxz υπό την επίδραση ομογενούς πεδίου βαρύτητας, έτσι ώστε τα δύο άκρα της, A και B , να εφάπτονται πάντοτε στον άξονα Oz και Ox αντίστοιχα. Αβαρές ελατήριο, σταθεράς k και φυσικού μήκους l_0 , συνδέει το A με το O . Να βρεθούν :



- οι εξισώσεις Lagrange του συστήματος
- η συνάρτηση του Hamilton
- τα ολοκληρώματα της κίνησης

- Διάρκεια εξετάσεων: 2.5 ώρες
- Βαθμολογία: Θέματα (1) και (2) από **2 μονάδες**, Θέματα (3) και (4) από **3 μονάδες**
- Δίνονται: $T = \frac{1}{2} m v_0^2 + \vec{v}_0 \cdot (\vec{\omega} \times m \vec{r}_K) + \frac{1}{2} J \omega^2$, $J' = J + m \delta^2$
- Ροπή αδράνειας ομογενούς ράβδου μάζας m και μήκους l , ως προς ένα άκρο: $J = ml^3/3$